Technologie Informacyjne i Komunikacyjne R

Mathematica — ćwiczenia

Trzy zajęcia po 2 godziny, zadania 1–26

Na podstawie zestawu zadań: Katarzyna Grzelak, Paweł Klimczewski, Michał Parniak (TIK-R 2022–2025)

Opracowanie: Michał Parniak (2026), `mparniak@fuw.edu.pl`

Na każde zajęcia zakładamy nowy notatnik (*File* → *New* → *Notebook*), np. `~/tikr/mathematica/zajecia1.nb`. Każde zadanie zaczynamy komórką tekstową z numerem (**Alt+4** — sekcja), a pierwszą komórką notatnika jest `ClearAll["Global`*"]`. Zapisuj notatnik często (**Ctrl+S**). Zadania z gwiazdką są dodatkowe. Podane odpowiedzi służą do sprawdzenia się — liczy się droga do nich.

Zajęcia 1: kalkulator, algebra, równania, analiza (zad. 1–9)

Zad. 1 Liczby dokładne i przybliżone

a) Oblicz $\sqrt{2}$ z dokładnością do 100 cyfr.

b) Ile cyfr ma 2026!? Ile ma zer na końcu? *Odp.:* 5822 cyfry, 505 zer

c) Porównaj `1/3 + 1/7`, `1/3. + 1/7` i `N[1/3 + 1/7, 30]`.

d) Oblicz $e^{i\pi}$, $\sin 60°$, `Sin[60]` i `Sin[60.]`. Skąd różnice?

Wskazówka: `IntegerLength`; liczba zer na końcu to wykładnik potęgi 10: `IntegerExponent[n, 10]`, albo przyjrzyj się `FactorInteger[2026!]`.

Zad. 2 Przekształcenia algebraiczne

Wymnóż $(a+b)^6$. Zapisz w postaci iloczynowej $x^3+6x^2+11x+6$. Uprość $\sin^2 x+\cos^2 x$. Rozłóż $\frac{1}{x^2-1}$ na ułamki proste. Ile wynosi `Simplify[Sqrt[x^2]]`, a ile przy założeniu $x<0$? *Odp.:* $-x$

Zad. 3 Równania

a) Rozwiąż $ax^2+bx+c=0$, a następnie **sprawdź** rozwiązania, podstawiając je do równania (`/.`) i upraszczając.

b) Rozwiąż $z^2-(1+i)z+6+3i=0$ i sprawdź wynik. *Odp.:* $z=3i$, $z=1-2i$

c) Rozwiąż układ $x+y+3z=0$, $2x-y+z=1$, $-x+2y-z=-1$. *Odp.:* $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=0$

Zad. 4 Granice

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}-n\right)$, b) $\lim_{n\to\infty} n^2\left[(1+\frac{p}{n})^q-(1+\frac{q}{n})^p\right]$, c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+n^5}{n^6}$.

d) Oblicz $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ oraz granice jednostronne $\frac{1}{x}$ w zerze. *Odp.:* a) $\frac{1}{100}$, b) $-\frac{pq(p-q)}{2}$, c) $\frac{1}{6}$

Zad. 5 Sumy

Oblicz $S(n)=1+2+\cdots+n$, $1^2+2^2+\cdots+n^2$ oraz $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, a także sumy nieskończone $\sum 1/k^2$, $\sum 1/k^4$, $\sum_{k\geq 0} 2^{-k}$. *Odp.:* $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$; $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^4}{90}$, 2

Zad. 6 Pochodne

Oblicz pochodną $w(x)=ax^5+(b+1)x^3+7x+1$. Oblicz $f^{(10)}(x)$ i $f^{(10)}(0)$ dla $f(x)=x^2\cos 2x$. *Odp.:* $f^{(10)}(0)=23040$

Zad. 7 Całki

Oblicz całki nieoznaczone i **sprawdź** każdą przez różniczkowanie (`Simplify[D[wynik, x] - funkcja]` ma dać 0):

$$\int (x^2 - 2x + 3)\, e^x \, dx, \qquad \int \sqrt{x}\, \ln^2 x \, dx, \qquad \int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx.$$

Oblicz też $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$ ($a > 0$, opcja `Assumptions`), $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx$ oraz numerycznie $\int_1^{\infty} \frac{x \ln^3 x}{x^4+1}\, dx$. *Odp.:* $\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$; 2; 0,370854

Zad. 8 Własne funkcje

a) Sprawdź różnicę między `= a` `:=`: wykonaj `a = 2; y1[x_] = a x; y2[x_] := a x; a = 10;` i porównaj `y1[3]`, `y2[3]`. Obejrzyj `?y1` i `?y2`.

b) Zdefiniuj funkcję prawdopodobieństwa wzbudzenia atomu dwupoziomowego (oscylacje Rabiego)

$$P_e(t, \Omega, \Delta) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}}{2}\, t\right)$$

i oblicz $P_e(\pi, 1, 0)$ oraz $P_e(\pi, 1, 1)$. *Odp.:* 1; 0,3166

c) Rozwiń P_e w szereg dla małych t do wyrazu t^2. *Odp.:* $\Omega^2 t^2/4$

d) Natężenie wiązki gaussowskiej to $I(r) = I_0\, e^{-2r^2/w_0^2}$. Oblicz moc $P = \int_0^{\infty} I(r)\, 2\pi r\, dr$. *Odp.:* $\pi w_0^2 I_0/2$

Zad. 9* Równanie Laplace'a

Sprawdź, które funkcje spełniają $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$: $\frac{x}{x^2+y^2}$, $\sin x \cosh y$, $\ln(x^2+y^2)$, $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$. Zrób to jednym poleceniem, definiując funkcję `lap[f_]`.

Zajęcia 2: listy, wykresy, macierze, równania różniczkowe, dane (zad. 10–17)

Zad. 10 Listy

a) Utwórz listę kwadratów liczb 1–10 i listę pierwszych 10 liczb pierwszych (`Prime`).

b) Z listy liczb pierwszych wybierz: trzeci element, ostatni, elementy 2–4; policz sumę i średnią. *Odp.:* 5, 29, $\{3, 5, 7\}$, 129, 12,9

c) Utwórz tabliczkę mnożenia 5×5 (`Table` z dwoma iteratorami), wyświetl ją przez `Grid[..., Frame -> All]`, wybierz trzeci wiersz i drugą kolumnę.

d) Oblicz sumę liczb od 1 do 100 podzielnych przez 3 lub przez 5. *Odp.:* 2418

Zad. 11 Wykresy

a) Narysuj $\sin x$ dla $x \in [0, \pi]$.

b) Narysuj na jednym wykresie $\sin x$, $\cos x$ i $\sin x \cos x$ dla $x \in [0, 2\pi]$ z legendą, opisem osi i tytułem.

c) Dla $f(x) = e^{-x+2}$ i $g(x) = x^3 - 30x + 30$ narysuj obie funkcje tak, żeby było widać ich punkty przecięcia, a potem znajdź wszystkie rozwiązania $f(x) = g(x)$ (`FindRoot` z różnymi punktami startowymi). *Odp.:* −2,49; 0,930; 4,886

d) Narysuj krzywą $(\cos 5t, \sin 3t)$ dla $t \in [0, 2\pi]$, okrąg $x^2 + y^2 = 9$ (`ContourPlot`) oraz powierzchnię $\sin x \cos y$ (`Plot3D`).

Zad. 12 Drgania tłumione i `Manipulate`

Drgania tłumione opisuje $y = Ne^{-ax}\sin(\omega x + \varphi)$, a obwiednie to $\pm Ne^{-ax}$.

a) Zdefiniuj te trzy funkcje (pięciu i trzech zmiennych) i narysuj je na jednym wykresie dla $N = 100$, $a = 0{,}03$, $\omega = 0{,}5$, $\varphi = \pi$, $x \in (0, 100)$.

b) Zrób `Manipulate` z suwakami: $N \in (0, 100)$, $a \in (0, 0{,}1)$, $\omega \in (0, 1)$, $\varphi \in (0, \pi)$. Ustaw stały `PlotRange`.

Zad. 13 Macierze

a) Dla macierzy Pauliego (`PauliMatrix[1]`, …) sprawdź, że $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$, $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$, $\{\sigma_x, \sigma_y\} = 0$, i znajdź ich wartości własne.

b) Dla macierzy obrotu $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ oblicz A^{-1}, AA^{-1} i $\det A$ (z `Simplify`).

c) Znajdź wartości i wektory własne $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ i sprawdź, że $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ dla każdej pary. *Odp.:* $\lambda = 3, 3, 1$

d) Oblicz e^B dla $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (`MatrixExp`).

Zad. 14 Obrót kubitu

Impuls rezonansowy obraca stan atomu o kąt θ: $U(\theta) = e^{-i\theta\sigma_x/2}$.

a) Zdefiniuj `u[th_]` przez `MatrixExp` i uprość ją (`FullSimplify`).

b) Oblicz stan $\psi(\theta) = U(\theta)\binom{1}{0}$ i prawdopodobieństwo wzbudzenia $|\psi_2|^2$ (założenie: θ rzeczywiste). *Odp.:* $\sin^2(\theta/2)$

c) Jakie są $|\psi_2|^2$ dla impulsów π i $\pi/2$? Czy stan pozostaje unormowany?

d) Narysuj $|\psi_2(\theta)|^2$ dla $\theta \in [0, 4\pi]$.

Zad. 15 Równania różniczkowe

a) Rozwiąż `DSolve` równanie oscylatora $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

b) Rozwiąż $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ dla $\gamma = 0{,}1$ (słabe tłumienie), $\gamma = 1$ (krytyczne) i $\gamma = 2$ (silne). Narysuj trzy rozwiązania na jednym wykresie.

c) Rozwiąż numerycznie (`NDSolve`) równanie wahadła $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$, $g = 9{,}81$, $l = 0{,}5$, $\dot{\theta}(0) = 0$ i porównaj z przybliżeniem małych kątów $\theta_0\cos(\sqrt{g/l}\,t)$ dla $\theta_0 = \pi/20$ i $\theta_0 = 3\pi/4$.

Zad. 16 Dopasowanie krzywej do danych

Plik `widmo.dat` zawiera zmierzoną linię absorpcyjną: odstrojenie lasera $\Delta/2\pi$ [MHz], absorpcję i jej niepewność. W katalogu notatnika pobierz archiwum: `wget -O widmo.zip ADRES`, gdzie `ADRES` to: `https://www.qodl.eu/documents/190/widmo.zip`, i rozpakuj je: `unzip widmo.zip`.

a) Wczytaj dane (`Import[..., "Table"]`), sprawdź ich rozmiar, wyświetl pierwszy i ostatni wiersz.

b) Narysuj punkty z niepewnościami: `ListPlot[{#1, Around[#2, #3]} & @@@ dane]`.

c) Dopasuj profil Lorentza $f(\Delta) = \dfrac{A}{1 + 4(\Delta - \Delta_0)^2/\Gamma^2} + c$ (`NonlinearModelFit` z wagami $1/\sigma^2$). Wartości startowe dobierz za pomocą `Manipulate`. Wypisz parametry i ich niepewności. *Odp.:* $\Gamma = 6{,}15 \pm 0{,}15$ MHz

d) Narysuj dane razem z dopasowaną krzywą, dodaj ramkę i opisy osi.

e) Wyeksportuj rysunek do `fit.pdf`, a parametry i niepewności do `parametry.txt`.

Wskazówka: `SetDirectory[NotebookDirectory[]]`; `fit["ParameterTable"]`, `fit["BestFitParameters"]`, `fit["ParameterErrors"]`; dla wag z niepewności punktów dodaj `VarianceEstimatorFunction -> (1 &)`. Ucięty wierzchołek krzywej: `PlotRange -> All`.

Zad. 17* Armata z oporem powietrza

Armata strzela pod kątem α pociskiem o masie $m = 4{,}1$ kg z prędkością $v_0 = 439$ m/s; siła oporu $-\kappa\vec{v}$, $\kappa = 0{,}92$ kg/s. Rozwiąż równania ruchu (`DSolve`), zapisz rozwiązanie jako funkcje $x(\alpha, t)$, $y(\alpha, t)$, znajdź zasięg dla $\alpha = 5°, 30°, 45°$ i narysuj trzy tory (`ParametricPlot`). Zrób `Manipulate` z suwakiem α. *Odp.:* 1480 m, 1690 m, 1383 m

Zajęcia 3: programowanie funkcyjne (zad. 18–26)

Zad. 18 Funkcje czyste i podstawienia

a) Zastosuj do liczby 5 funkcję dodającą 1 na trzy sposoby: `(# + 1 &)[5]`, `Function[x, x + 1][5]`, `(x |-> x + 1)[5]`.

b) Porównaj `f @ x`, `f /@ {a, b, c}` i `f @@ {a, b, c}`.

c) Podstaw `{x -> 3, y -> 2}` do $x^2 + y$, a `{a -> x + 1, b -> y, c -> 2}` do $a^2 + bc$.

d) Oblicz $n^2 + 1$ dla $n = 1, \ldots, 5$ trzema sposobami: `/@`, `Map` i działaniem na liście.

e) Dla listy par $\{\{3,4\},\{5,12\},\{8,15\}\}$ oblicz długości przeciwprostokątnych jednym poleceniem z `@@@`. *Odp.:* $\{5, 13, 17\}$

Zad. 19 Wybieranie: `Select`, `Count`, `Cases`

a) Ile jest liczb pierwszych mniejszych od 1000? (`Select` + `PrimeQ`; porównaj z `PrimePi[1000]`) *Odp.:* 168

b) Oblicz sumę liczb mniejszych od 1000 podzielnych przez 3 lub 5. *Odp.:* 233168

c) Znajdź pary liczb pierwszych bliźniaczych (różniących się o 2) wśród pierwszych 50 liczb pierwszych. *Odp.:* 16 par

d) Z listy `{1, 2.5, x, 3, "tekst", 7/2, 4}` wybierz liczby całkowite (`Cases` z wzorcem).

e) Posortuj listę `{{"Rb", 87}, {"Cs", 133}, {"Li", 7}, {"Na", 23}}` według liczby masowej.

Wskazówka: c) `Partition[lista, 2, 1]` tworzy pary sąsiednich elementów.

Zad. 20 Iteracje: `NestList` i `FixedPoint`

a) Odwzorowanie logistyczne $x_{n+1} = r x_n(1 - x_n)$, $x_0 = 0{,}2$: wygeneruj 50 kroków (`NestList` z funkcją czystą) dla $r = 2{,}8$, $3{,}2$, $3{,}9$ i narysuj (`ListLinePlot`). Co się dzieje w każdym przypadku?

b) * Narysuj diagram bifurkacyjny: dla $r \in [2{,}5; 4]$ (krok 0,005) wykonaj 300 kroków, odrzuć pierwsze 200 i narysuj pozostałe punkty (r, x_n).

c) Metoda Newtona dla $\sqrt{2}$: iteruj $x \to (x + 2/x)/2$ od $x = 1$ (`FixedPointList`). Po ilu krokach wynik się ustala?

d) Rozwiąż $\cos x = x$, iterując cos (`FixedPoint[Cos, 1.]`). *Odp.:* 0,739085

e) Napisz `newton[f_, x0_]` — ogólną metodę Newtona $x \to x - f(x)/f'(x)$ — i użyj jej dla $x^2 - 2$, $\cos x - x$, $e^{-x} - \sin x$. *Odp.:* 1,41421; 0,739085; 0,588533

Zad. 21 `Fold`

a) Porównaj `FoldList[Plus, 0, Range[5]]` z `Accumulate[Range[5]]`.

b) Schemat Hornera: `Fold[#1 x + #2 &, 0, {1, -3, 0, 2}]` — jaki wielomian powstaje? Sprawdź przez `Expand`.

c) Oblicz 10! przez `Fold` i `Times`.

Zad. 22 Rekurencja i zapamiętywanie

a) Zdefiniuj rekurencyjnie `silnia` ($0! = 1$, $n! = n\,(n-1)!$, tylko dla dodatnich liczb całkowitych) i sprawdź, że `silnia[2026] == 2026!` (zwiększ `$RecursionLimit`).

b) Zdefiniuj ciąg Fibonacciego zwykłą rekurencją i z zapamiętywaniem (`fib[n_] := fib[n] = ...`). Porównaj czasy (`AbsoluteTiming`) dla $n = 25$, a potem oblicz F_{200} wersją z pamięcią.

Zad. 23 Bez pętli

Przepisz w stylu funkcyjnym (jedno krótkie polecenie, bez `Do` i zmiennych pomocniczych):

```
lis = {}; Do[AppendTo[lis, 1/2 + 1/n], {n, 6}]; lis
s = 0; Do[If[EvenQ[k], s += k^3], {k, 1, 20}]; s
```

Odp.: drugi wynik: 24200

Zad. 24 Błądzenie losowe w jednym wymiarze

a) Wygeneruj 200 kroków x_k z rozkładu normalnego $N(0, \sigma)$ (`RandomVariate`, `NormalDistribution`) i narysuj je (`ListPlot`).

b) Trajektoria to sumy częściowe $X(i) = \sum_{k \le i} x_k$ (`Accumulate`) — narysuj ją (`ListLinePlot`).

c) Narysuj 10 niezależnych trajektorii na jednym wykresie.

d) Dla 2000 trajektorii oblicz $\langle X(i)^2 \rangle$ dla każdego kroku i porównaj na wykresie z przewidywaniem $\langle X(i)^2 \rangle = i\sigma^2$.

Zad. 25 Ewolucja kubitu

Stan $\psi(t_1, t_2) = e^{i\sigma_y t_2}\, e^{i\sigma_x t_1} \binom{1}{0}$.

a) Zdefiniuj macierze Pauliego i stan początkowy.

b) Zdefiniuj `u[t1_, t2_]` przez `MatrixExp` i `psi[t1_, t2_]`.

c) Oblicz ψ dla kilku par (t_1, t_2), moduły (`Abs`) i fazy (`Arg`) składowych; sprawdź normę. *Odp.:* $\psi(\pi/2, 0) = (0, i)$

d) Zrób `Manipulate` z suwakiem t_2, pokazujący moduły obu składowych w funkcji t_1.

Zad. 26* Monte Carlo

Wylosuj 10^5 punktów w kwadracie $[0,1]^2$ (`RandomReal[1, {n, 2}]`) i oszacuj π jako czterokrotność ułamka punktów wewnątrz ćwiartki koła — jednym poleceniem z `Count` i funkcją czystą. Jak niepewność zależy od n?