Programowanie I R

Zadania - seria 13.
Transformata Fouriera

04.06.2024

Zadanie 1. Filtry aperturowe

Wykrzystując funkcję z fft2 numpy napisz program który aplikuje różne filtry na obrazach, w domenie fourierowskiej. W tym celu użyjemy obrazu w skali szarości. Użyj dowolny obraz oraz skonwertuj go do skali szarości przy pomocy biblioteki PIL. Następnie wykonaj dwuwymiarową transformatę Fouriera i na niej zaaplikuj filtry odcinające wysokie lub niskie częstotliwości przestrzenne. Na końcu dokonaj odwrotnej trasnformaty Fouriera i zaobserwuj wygląd obrazu po filtrowaniu.

Zadanie 2. Widmo procesu Ornsteina–Uhlenbecka

Proces Ornsteina–Uhlenbecka jest procesem stochastycznym, w którym kolejne inkrementy stochastyczne są zadane rozkładem normalnym, a ponadto mamy do czynienia z zanikiem wykładniczym. Oznaczymy zmienną losową $X(k)$ gdzie k jest dyskretną zmienną czasową. Załóżmy że $X(0) = 0$, a $X(k+1) - X(k) = -\theta X(k)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W$, gdzie $\mathrm{d}W \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. Przy pomocy dyskretnej transformaty Fouriera znajdź widmo mocy (power spectral density) tego procesu, zdefiniowane jako moduł kwadrat dyskretnej transformaty Fouriera. Dokonaj symulacji używając pakietu random, oblicz kilka przykładowych widm i uśrednij wyniki.

Kanoniczny przykład to zanik oscylatora harmonicznego w skończonej temperaturze. Wtedy na przykład $\theta = k/\gamma$ (k jest stałą sprężyny) a $\sigma = \sqrt{2k_BT/\gamma}$

Zadanie 3. Odzysk fazy - implementacja trasnformaty Hilberta

Napisz program pozwalający odzyskać zespoloną amplitudę pewnej funkcji postaci $A(t)\exp(i\omega t)$ przy założeniu że $A(t)$ jest wolnozmienne względem okresu $T = 2\pi/\omega$ oraz że mierzoną wartością jest część rzeczywista $Re(A(t)\exp(i\omega t))$. W tym celu użyjemy transformaty Fouriera uzyskać z mierzonej funkcji tzw. sygnał analityczny.

Wygeneruj sygnał wykorzystując dwa pojedyncze przebiegi procesu Wienera lub Ornsteina-Uhlenbecka z Zadania 2 jako dwie kwadratury sygnału, tzn. $A(t) = X_1(t) + iX_2(t)$, a mierzyony sygnał $S(t) = Re(A(t)\exp(i\omega t))$.

W pierwszej kolejności dokonać transformaty Fouriera mierzonego sygnału. Zaobserwuj jej strukturę dla dodanich i ujemnych częstości. Porównaj wynik z użyciem funkcji rfft, która akceptuje rzeczywisty input.

W drugiej kolejności wyzeruj ujemny zakres częstości, jeśli to konieczne.

W trzeciej kolejności dokonaj odwrotnej transformaty Fouriera i zobrazuj części rzeczywiste i urojone sygnału. Równocześnie dokonaj przesunięcia w domenie transformaty tak, aby częstość $+\omega$ wypadła we zerze. Porównaj wynik transformaty odwrotnej z orginalnymi kwadraturami.

Zadanie 4. Algorytm Gerchberga-Saxtona

Naszym zadaniem jest znalezienie struktrury hologramu, znając jego obraz bezpośredni oraz obraz dyfrakcyjny. Struktura hologramu jest dana zespoloną funkcją $H(x, y)$, gdzie jej moduł kwadrat jest widoczny bezpośrednio w obrazie, a fazę musimy odzyskać używając np. algorytmu Gerchberga-Saxtona. Zapoznaj się z pseudokodem algorytmu i zaimplenetuj go używając funkcji fft z numpy.

Zadanie 5. Szybka transformata Fouriera

Zaimplementuj dyskretą transformatę Fouriera i porównaj jej działanie z funkcjami numpy fft.

Opracownie: Michał Parniak (mparniak@fuw.edu.pl)